

TEMA 10 - FUNCIONES ELEMENTALES

10.1 – CONCEPTO DE FUNCIÓN

DEFINICIÓN : f es una **función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$** si a cada número real, $x \in \text{Dom}$, le hace corresponder un único número real, $f(x)$:

Lo denotamos por : $f : \text{Dom} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow y = f(x)$

El conjunto Dom de los valores que puede tomar la variable independiente, “ x ”, se llama **dominio de definición de la función**.

El conjunto de los valores que toma la función se llama **recorrido**.

Puesto que tanto la variable “ x ” como la función “ $f(x)$ ” toman valores reales, estas funciones se llaman **funciones reales de variable real**.

RAZONES POR LAS QUE EL DOMINIO DE DEFINICIÓN PUEDE RESTRINGIRSE :

- Imposible de realizar alguna operación con ciertos valores de x : denominadores que se anulan, raíces cuadradas de números negativos,....
- Contexto real del que se ha extraído la función: Edad de una persona,...
- Por voluntad de quien propone la función: Número menor que 7,...

CÁLCULO DEL DOMINIO :

- FUNCIONES POLINÓMICAS: El dominio de un polinomio es todo $\mathbb{R}$: $f(x) = P(x)$ $D(f) = \mathbb{R}$

- FUNCIONES RACIONALES: El dominio de las funciones racionales es todo $\mathbb{R}$ menos los puntos donde se anula el denominador:

$$f(x) = P(x) / Q(x) \quad D(f) = \{ x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R} / Q(x) = 0 \}$$

- FUNCIONES RADICALES

$$f(x) = \sqrt[n]{P(x)} \quad \text{Si } n \text{ es impar } D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Si } n \text{ es par } D(f) = \{ x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0 \} = \mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R} / P(x) < 0 \}$$

- FUNCIONES EXPONENCIALES

$$f(x) = a^{P(x)} \quad D(f) = \mathbb{R}$$

- FUNCIONES LOGARÍTMICAS

$$f(x) = \log_a P(x) \quad D(f) = \{ x \in \mathbb{R} / P(x) > 0 \} = \mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R} / P(x) \leq 0 \}$$

- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$f_1(x) = \sin P(x), \quad f_2(x) = \cos P(x) \quad D(f_1) = D(f_2) = \mathbb{R}$$

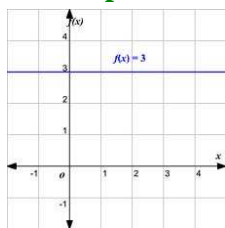
El resto (tangente, secante,...) ponerlas como cociente y estudiar su dominio como una función racional (denominador diferente de cero).

4.2 – REPRESENTACIÓN Y ESTUDIO DE FUNCIONES

FUNCIONES POLINÓMICAS

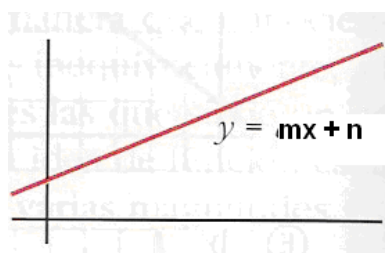
• Grado 0: $y = k$

Rectas paralelas al eje OX



• Grado 1 : $y = mx + n$

Rectas



La **función polinómica de primer grado** o **función lineal**: $y = mx + n$, se representa mediante una recta de pendiente m y que pasa por el punto $(0, n)$. La n se llama ordenada en el origen.

Pendiente de una recta es la variación (aumento o disminución) que se produce en la y cuando la x aumenta una unidad. En una ecuación lineal, la pendiente de la recta es el coeficiente de la x cuando se despeja la y . (Si $m > 0$, es creciente; Si $m < 0$, es decreciente)

Si conocemos las coordenadas de dos puntos de la recta: $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ la pendiente se calcula :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\Delta y = \text{Incremento de "y"} \text{ entre } \Delta x = \text{Incremento de "x"})$$

Si de una recta conocemos un punto $P(x_1, y_1)$ y su pendiente m , la ecuación de la recta es:

$$y - y_1 = m.(x - x_1)$$

Para representarla se dan dos valores cualesquiera a la “ x ” y se calcula el valor de la “ y ”.

Interpolación y extrapolación lineal

Si sabemos que una función es lineal (al menos aproximadamente) y que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ podemos hallar su valor en cualquier otro punto $x = x_3$

1. Hallamos la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos A y $B \Rightarrow$

$$y = mx + n$$

2. Sustituimos el valor de x_3 en x y calculamos la y .

Si $x_3 \in (x_1, x_2)$ estamos interpolando.

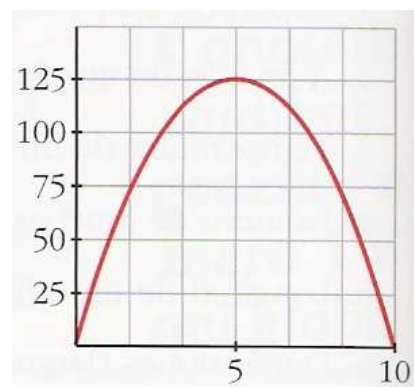
Si $x_3 \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ estamos extrapolando.

En la extrapolación, cuanto más alejado esté x_3 del intervalo (x_1, x_2) , menos fiable es el valor que obtenemos para $f(x_3)$.

• Grado 2: FUNCIONES CUADRÁTICAS Parábolas

Las **funciones polinómicas de segundo grado** o **funciones cuadráticas** : $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se representan mediante parábolas.

- Tienen ejes paralelos al eje Y
- Las formas de estas parábolas (que sus ramas estén hacia arriba o hacia abajo, que sean más o menos anchas,...) dependen, exclusivamente del valor de a:
 - Si $a > 0$, las ramas van hacia arriba (Cónvexa)
 - Si $a < 0$, las ramas van hacia abajo (Cóncava)
 - Cuando mayor sea $|a|$, más estilizada es la parábola
- La abscisa del vértice de la parábola es : $V_x = -\frac{b}{2a}$

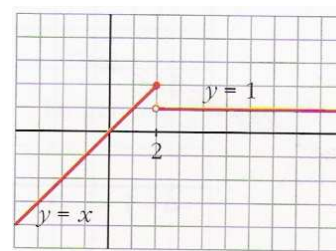


Para representarla se calcula el vértice en la “x” y dos valores más pequeños y dos valores más grandes y se calculan las respectivas “y” de estos valores.

• Grado > 2 : Lo veremos en el tema 12 Curvas

FUNCIONES DEFINIDAS “A TROZOS”

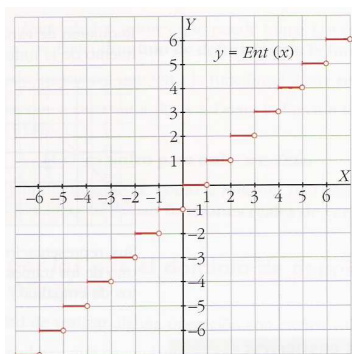
Se calcula su dominio y se hace una tabla de valores para cada trozo (los valores de la tabla en cada trozo dependerá del tipo de función).



DOS FUNCIONES INTERESANTES

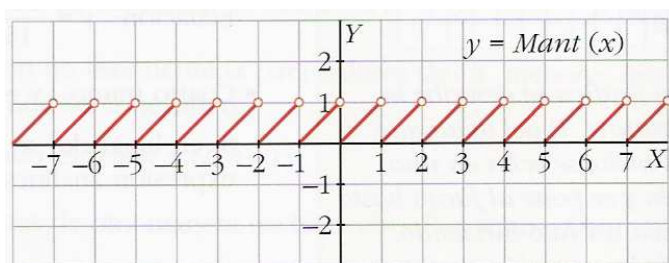
• Función parte entera :

Se llama **parte entera** de un número x al mayor número entero menor o igual a x . A partir de eso, definimos la **función para entera de x** , $\text{Ent}(x)$, que hace corresponder a cada número x su parte entera.



• Función parte decimal :

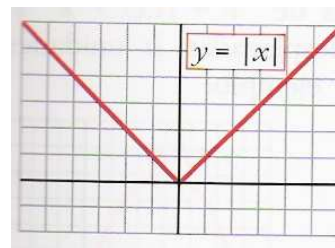
La **parte decimal** o **mantisa** de un número x es $\text{Mant}(x) = x - \text{Ent}(x)$. A partir de eso, definimos la **función parte decimal de x** , $\text{Mant}(x)$ que hace corresponder a cada número x su parte decimal.



VALOR ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN

El valor absoluto de un número x coincide con x si es positivo o

nulo, o con su opuesto si es negativo: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

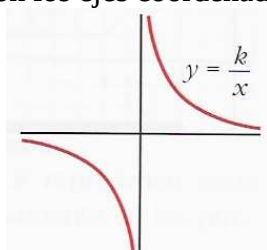


El general el valor absoluto de una función se define así: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$

Para representarla se iguala lo de dentro del valor absoluto a cero y se resuelve. Estos puntos nos dividen la función en trozos por tanto podemos tratarla como una función a trozos.

FUNCIONES RACIONALES (Sencillas, las complicadas las veremos en el Tema 12)

Se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** a aquellas cuya ecuación es $y = f(x)/g(x)$ y sus gráficas son hipérbolas. Sus asíntotas son los ejes coordenados.



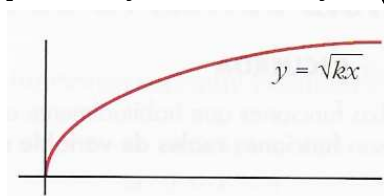
También son hipérbolas las gráficas de las funciones $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Para representarlas se hace previamente la división.

Representación :

- Calcular el dominio
- Hallar una tabla de valores según el dominio
- Dibujarlas teniendo en cuenta las asíntotas.

FUNCIONES RADICALES

Se llaman **funciones radicales** a aquellas cuya ecuación es $y = \sqrt[n]{f(x)}$

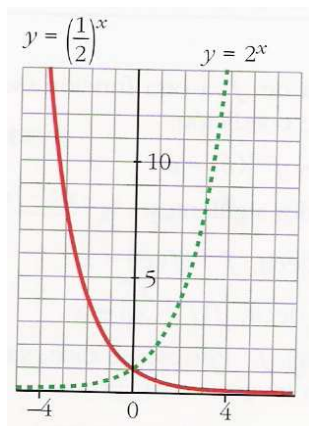


Para representarlas:

- Calcular el dominio
- Hallar una tabla de valores según el dominio. (Importante: $f(x) = 0$ si es de índice par determinan el dominio y se es de índice impar es el punto de inflexión y hay que tomar valores menores y mayores que él)

FUNCIONES EXPONENCIALES

Se llaman **funciones exponenciales** las que tienen la ecuación $y = a^x$, siendo la base a un número positivo distinto de 1.



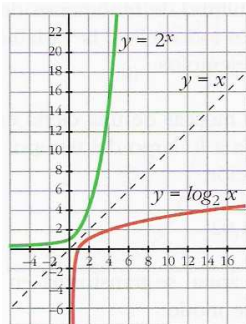
Notas:

- En matemáticas superiores la función $y = e^x$ es extraordinariamente importante. Tanto es así que cuando se habla de “la función exponencial” sin mencionar cuál es su base, se está haciendo referencia a ella.
- También son exponenciales las funciones $y = a^{kx}$, pues $a^{kx} = (a^k)^x$ es decir es una función exponencial de base a^k .
- En las calculadoras científicas suele haber dos teclas 10^x , e^x con las que se obtienen valores de las funciones $y = 10^x$, $y = e^x$ respectivamente.

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Se llaman **funciones logarítmicas** las que tienen la ecuación $y = \log_a x$, siendo a un número positivo distinto de 1

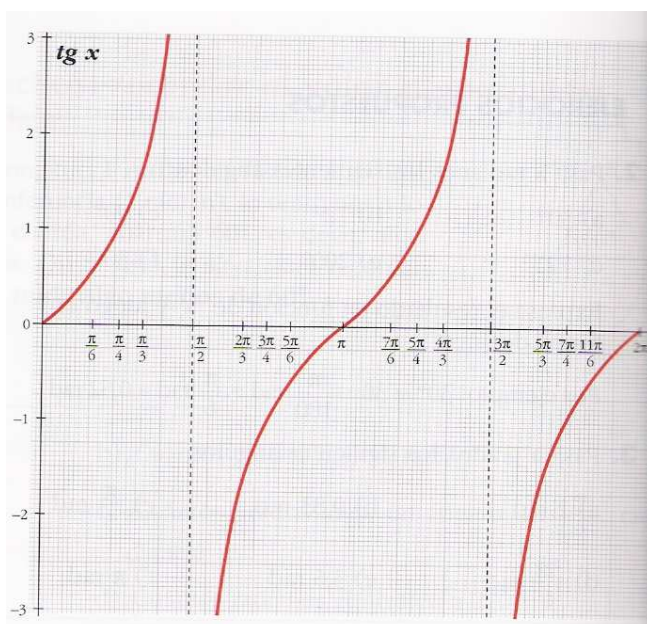
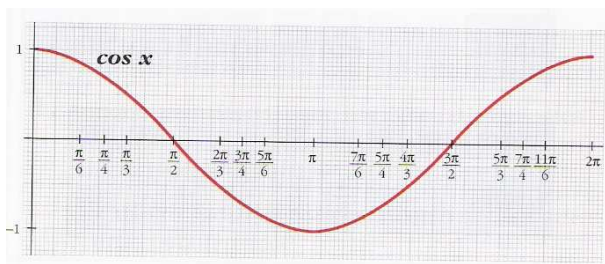
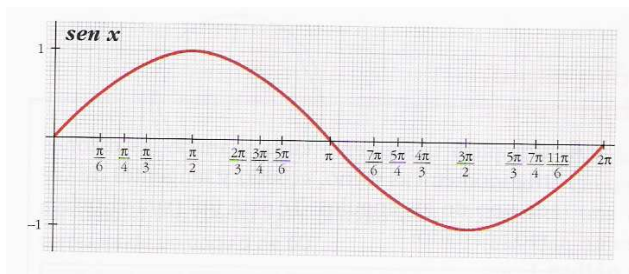
$y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$, por tanto $y = \log_a x$ e $y = a^x$ son funciones inversas



Notas:

- En matemáticas superiores la función $y = \log_e x$ es muy importante. Se le llama logaritmo neperiano y se designa por $y = \ln x$ o $y = Lx$. Es la función inversa de la exponencial de base e : $y = e^x$.
- En las calculadoras científicas suele haber dos teclas, $\log$ y $\ln$ con las que se obtienen valores de las funciones $y = \log x$ y $y = \ln x$, respectivamente.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS (Repasar Tema 5)

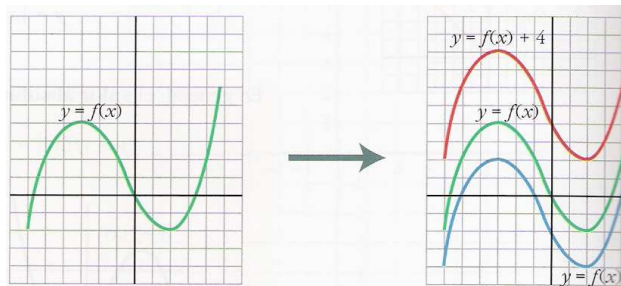


10.3 – ALGUNAS TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

REPRESENTACIÓN DE $y = f(x) \pm k$ A PARTIR DE $y = f(x)$

Si sumamos una constante “k” a la “y” $\Rightarrow$ Subimos “k” unidades

Si restamos una constante “k” a la “y” $\Rightarrow$ Bajamos “k” unidades



REPRESENTACIÓN DE $y = -f(x)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

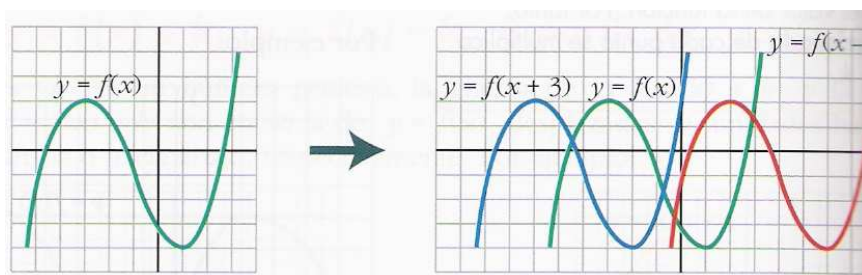
Si cambiamos de signo a la “y” $\Rightarrow$ Hacemos una simetría respecto del eje OX



REPRESENTACIÓN DE $y = f(x \pm k)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

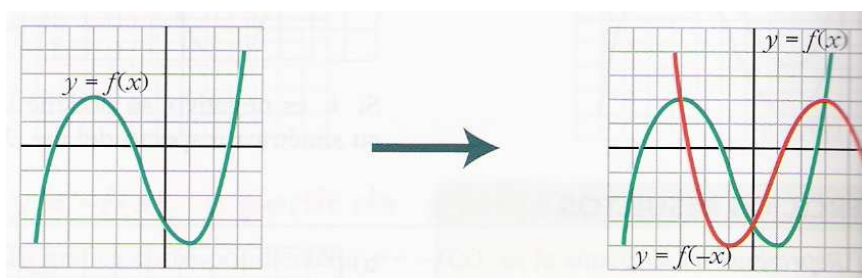
Si sumamos una constante “k” a la x $\Rightarrow$ Nos desplazamos “k” unidades hacia la izquierda

Si restamos una constante “k” a la x $\Rightarrow$ Nos desplazamos “k” unidades hacia la derecha



REPRESENTACIÓN DE $y = f(-x)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

Si cambiamos de signo a la “x” $\Rightarrow$ Hacemos una simetría respecto del eje OY



10.4 – OTRAS OPERACIONES CON FUNCIONES

FUNCIÓN COMPUESTA: Dadas dos funciones, f y g , se llama **función compuesta** de f y g , y se designa $g \circ f$, a la función que transforma x en $g[f(x)]$

$$x \xrightarrow{g \circ f} g[f(x)]$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$$

La expresión $g \circ f(x)$ se lee f compuesta con g . Se nombra en primer lugar la función de la derecha porque es la primera en actuar sobre la x .

En general, la función $g[f(x)] \neq f[g(x)]$

FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA DE OTRA. Se llama **función inversa o recíproca** de f a otra función (se designa f^{-1}) que cumple la siguiente condición: Si $f(a) = b$, entonces, $f^{-1}(b) = a$. Como consecuencia $f^{-1}[f(x)] = f[f^{-1}(x)] = x$

Además las gráficas de las dos funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primero y tercer cuadrante ($y = x$)

Ejemplos: Potencias y raíces

$$y = x^n$$

$$y = \sqrt[n]{x}$$

Exponenciales y logarítmicas

$$y = a^x$$

$$y = \log_a x$$

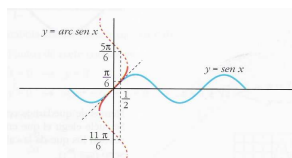
Trigonométricas y arcos

$$y = \sin x$$

$$y = \arcsen x$$

Funciones arco

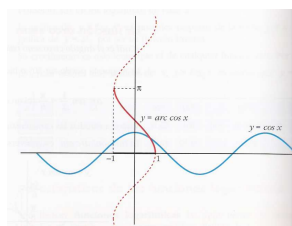
La función arcoseno : Arcsen es una función definida en $[-1,1]$ y que toma valores en $[-\pi/2, \pi/2]$ tal que : $\arcsen a = b \Rightarrow \sin b = a$



Es una función creciente

$$\text{Verifica: } \sin(\arcsen x) = x \quad \arcsen(\sin x) = x$$

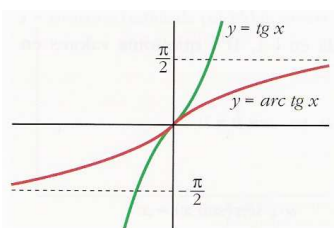
La función arcocoseno : Arccos es una función definida en $[-1,1]$ y que toma valores en $[-\pi/2, \pi/2]$ tal que : $\arccos a = b \Rightarrow \cos b = a$



Es una función decreciente

$$\text{Verifica: } \cos(\arccos x) = x \quad \arccos(\cos x) = x$$

La función arcotangente : Arctag es una función definida en $\mathbb{R}$ y que toma valores en $(-\pi/2, \pi/2)$ tal que : $\arctag a = b \Rightarrow \tan b = a$



Es una función creciente

$$\text{Verifica: } \tan(\arctan x) = x \quad \arctan(\tan x) = x$$