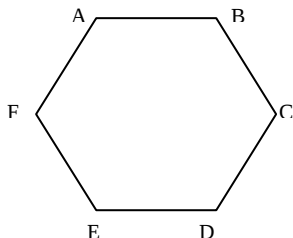


VECTORES

EJERCICIO 1 : ABCDEF son los vértices de un hexágono regular de centro O. En los siguientes pares de vectores compara sus módulos, direcciones y sentidos:



a) AB y BC

b) BC y EF

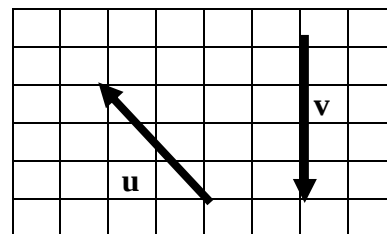
c) AB y FC

- a) AB y BC : Tienen el mismo módulo y distinta dirección. No se puede comparar el sentido.
 b) BC y EF: Tienen el mismo módulo y dirección, y sentidos opuestos.
 c) AB y FC: Tienen la misma dirección y sentido, pero distinto módulo.

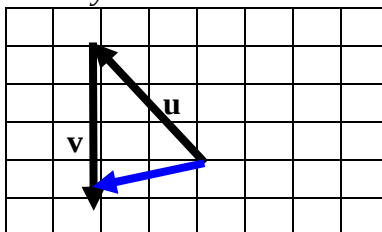
EJERCICIO 2 : Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, representa los vectores:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

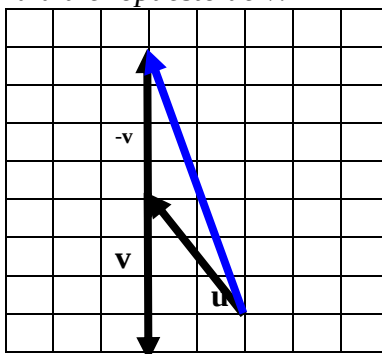
b) $\vec{u} - \vec{v}$



- a) Para sumar u y v , colocamos v de modo que su origen coincida con el extremo de u . $u + v$ es el vector cuyo origen es el de u y extremo el de v



- b) Para obtener $u - v$ se le suma a u el opuesto de v .



EJERCICIO 3 : Dados los vectores $u(2,1)$, $v(1,-2)$. Calcular las coordenadas de los vectores:

a) $u + v$

b) $u - v$

c) $2u + \frac{1}{2}v$

a) $u + v = (2,1) + (1,-2) = (2+1, 1-2) = (3,-1)$

b) $u - v = (2,1) - (1,-2) = (2-1, 1-(-2)) = (1,3)$

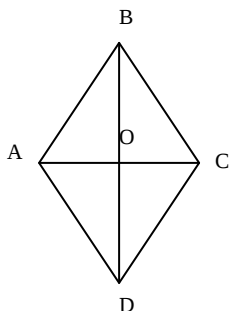
c) $2u + \frac{1}{2}v = 2(2,1) + \frac{1}{2}(1,-2) = (4,2) + (\frac{1}{2}, -1) = (\frac{9}{2}, 1)$

EJERCICIO 4 : Calcular m y n para que se verifique $w = mu + nv$, siendo $u(4,-8), v(0,2), w(2,-1)$

$$(2,-1) = m(4,-8) + n(0,2) \Rightarrow \begin{cases} 2 = 4m \\ -1 = -8m + 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ -1 = -4 + 2n \rightarrow n = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$w = \frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v$. Así expresamos w como combinación lineal de u y v

EJERCICIO 5 : La figura ABCD es un rombo de lado 6 cm y ángulos 60° y 120° . Halla:



a) AB.AD

b) DA.DC

c) OB.OC

d) AO.OC

$$a) AB.AD = |AB|. |AD|. \cos 120^\circ = 6.6. \left(-\frac{1}{2}\right) = -18$$

$$b) DA.DC = |DA|. |DC|. \cos 60^\circ = 6.6. \frac{1}{2} = 18$$

$$c) OB.OC = |OB|. |OC|. \cos 90^\circ = (3\sqrt{3}).3.0 = 0$$

$$d) AO.OC = |AO|. |OC|. \cos 0^\circ = 3.3.1 = 9$$

EJERCICIO 6 : Dados los vectores $a(-3,4)$, $b(5,-1)$, hallar:

a) $a.b$ b) $|a|$ c) $|b|$ d) ángulo que forman a y b

$$a) a.b = -3.5 + 4.(-1) = -15-4 = -19$$

$$b) |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$c) |b| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$d) \cos(a,b) = \frac{a.b}{|a|. |b|} = \frac{-19}{5.\sqrt{26}} = -0,7452$$

Utilizando la calculadora: $\text{INV} + \text{COS } 0,7452 \pm = 138^\circ 10' 35''$

EJERCICIO 7 : Dado el vector $v(-5,3)$, calcula las coordenadas de los siguientes vectores:

a) unitarios y de la misma dirección que v

b) ortogonales a v y del mismo módulo

c) Ortonormales a v

a) Para convertir un vector en unitario, lo dividimos por su módulo:

$$|v| = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \Rightarrow v_1 = \pm \left(-\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}} \right)$$

Como queremos que tenga la misma dirección que u, nos quedamos con la solución

$$\text{positiva: } v_1 = \left(-\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}} \right)$$

b) Se permutan las coordenadas y se cambia una de signo: $w_1 = (3,5)$ y $w_2 = (-3,-5)$

Ortogonal y unitario: Dividimos los vectores w_1 y w_2 que son ortogonales entre su módulo para convertirlos en unitarios: $|w_1| = |w_2| = |v| = \sqrt{34}$

$$z_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}} \right) \text{ y } z_2 = \left(\frac{-3}{\sqrt{34}}, \frac{-5}{\sqrt{34}} \right)$$

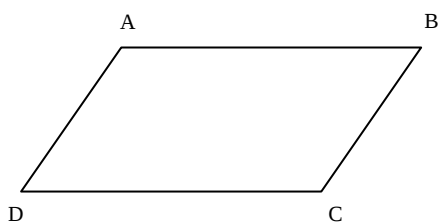
EJERCICIO 8 : Halla un vector v de módulo $\sqrt{5}$ y que forme con $u(2,-4)$ un ángulo de 60°

$$\text{Sea } v(x,y) \Rightarrow \begin{cases} |v| = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \\ \cos 60^\circ = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2x - 4y}{\sqrt{5}\sqrt{20}} \Rightarrow 2x - 4y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+4y}{2} \\ \frac{25+40y+16y^2}{4} + y^2 = 5 \Rightarrow 4y^2 + 8y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -0,13 \rightarrow x = 2,24 \\ y = -1,86 \rightarrow x = -1,22 \end{cases} \end{cases}$$

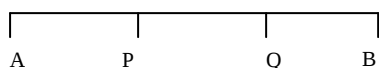
Hay dos soluciones: $v_1(2,24;-0,13)$ y $v_2(-1,22;-1,86)$

EJERCICIO 9 : Dados los puntos $A(3,-2)$, $B(1,3)$, $C(-6,0)$, halla el punto D de modo que $ABCD$ sea un paralelogramo:



$$\begin{aligned} AD &= BC \\ (x,y) - (3,-2) &= (-6,0) - (1,3) \\ \begin{cases} x - 3 = -7 \rightarrow x = -4 \\ y + 2 = -3 \rightarrow y = -5 \end{cases} &\Rightarrow D(-4,-5) \end{aligned}$$

EJERCICIO 10 : Halla los puntos que dividen al segmento de extremos $A(-2,3)$ y $B(6,2)$ en tres partes iguales



$$AB = 3(AP) \Rightarrow (6+2, 2-3) = 3 \cdot (x+2, y-3) \Rightarrow \begin{cases} 8 = 3x + 6 \rightarrow x = \frac{2}{3} \\ -1 = 3y - 9 \rightarrow y = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$Q \text{ es el punto medio entre } P \text{ y } B \Rightarrow Q = \left(\frac{\frac{2}{3} + 6}{2}, \frac{\frac{8}{3} + 2}{2} \right) = \left(\frac{20}{6}, \frac{14}{6} \right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

EJERCICIO 11 : Sabiendo que $|\vec{u}| = 4$ y $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{3}{2} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solución:

Puesto que $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{3}{2} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \rightarrow \vec{u} = \frac{3}{2} \vec{v} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores que tienen la misma dirección y sentido $\rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \underbrace{\cos 0^\circ}_1 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = 4|\vec{v}|$$

$$\vec{u} = \frac{3}{2} \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{3}{2} \vec{v}\right) \cdot \vec{v} = \frac{3|\vec{v}|^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{3}{2} |\vec{v}|^2 - 4|\vec{v}| = 0 \rightarrow |\vec{v}| \left(\frac{3}{2} |\vec{v}| - 4\right) = 0 \rightarrow \frac{3}{2} |\vec{v}| - 4 = 0 \rightarrow |\vec{v}| = \frac{8}{3}$$

$|\vec{v}| \neq 0$ ya que $|\vec{u}| = 4$ y $\vec{u} = \frac{3}{2} \vec{v}$.

Por tanto, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4|\vec{v}| = 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$.

EJERCICIO 12 :

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ y el ángulo que forman es de 30° , halla $|\vec{a} - \vec{b}|$ y $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Solución:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 30^\circ = 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Luego:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 3^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3} + 2^2 = 9 - 6\sqrt{3} + 4 \approx 2,61 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2,61} \approx 1,62$$

Análogamente:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3^2 + 2 \cdot 3\sqrt{3} + 2^2 = 9 + 6\sqrt{3} + 4 \approx 23,39 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{23,39} \approx 4,84$$

EJERCICIO 13 : Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$ y $\vec{u} = -5\vec{v}$. Calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Solución:

Puesto que $\vec{u} = -5\vec{v}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores que tienen la misma dirección pero sentido opuesto $\rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = -3|\vec{v}|$$

$$\vec{u} = -5\vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = (-5\vec{v}) \cdot \vec{v} = -5|\vec{v}|^2$$

$$\rightarrow -5|\vec{v}|^2 - 3|\vec{v}| = 0 \rightarrow |\vec{v}|(5|\vec{v}| - 3) = 0 \rightarrow 5|\vec{v}| - 3 = 0 \rightarrow |\vec{v}| = \frac{3}{5}$$

$|\vec{v}| \neq 0$ puesto que $|\vec{u}| = 3 \neq 0$ y $\vec{u} = -5\vec{v}$

Por tanto: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3|\vec{v}| = -3 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{9}{5}$