

TEMA 9 – LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

CIRCUNFERENCIA

EJERCICIO 1 : Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $P(1, 3)$, y que es tangente a la recta $r: 4x + 3y - 1 = 0$.

Solución:

- El radio, R , de la circunferencia es igual a la distancia del centro, $P(1, 3)$, a la recta tangente,

$$r: 4x + 3y - 1 = 0: R = \text{dist}(P, r) = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|4+9-1|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$$

- La ecuación de la circunferencia será: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2$; es decir:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{144}{25} \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y - \frac{106}{25} = 0 \Rightarrow 25x^2 + 25y^2 - 50x - 150y - 106 = 0$$

EJERCICIO 2 :

a) Calcula el centro y el radio de la circunferencia de ecuación: $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 24 = 0$

b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 3, que es concéntrica con la anterior.

Solución:

a) Dividimos entre 2 la ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

$$\text{Centro} = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right) = (2, 3)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{2^2 + 3^2 - 12} = \sqrt{4+9-12} = \sqrt{1} = 1$$

b) Si tiene centro $(2, 3)$ y radio 3, su ecuación será: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$, es decir:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$

EJERCICIO 3 : Estudia la posición relativa de la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$ y la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$$

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left(\frac{6}{2}, \frac{2}{2}\right) = (3, 1)$$

$$\text{Radio} = R = \sqrt{9+1-6} = \sqrt{4} = 2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada: $\text{dist}(C, r) = \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|6-3+5|}{\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}} \approx 2,22 > 2$

Por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

EJERCICIO 4 :

a) Halla el centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

b) Estudia la posición relativa de la recta $2x - y = 0$ respecto a la circunferencia anterior.

Solución:

$$\text{a) Centro} = \left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}\right) = (1, 0)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{1^2 + 0^2 - (-3)} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

- b) Hallamos la distancia del centro a la recta dada: $\text{distancia} = \frac{|2 \cdot 1 - 0|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} < \text{radio} \rightarrow$ Son secantes.

EJERCICIO 5 : Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$ y cuyo centro es el punto $C(2, 1)$.

Solución:

- El radio de la circunferencia es la distancia del centro a la recta dada:

$$\text{Radio} = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|6-4+5|}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$$

- La ecuación de la circunferencia es: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{49}{25}$, es decir: $25x^2 + 25y^2 - 100x - 50y + 76 = 0$

EJERCICIO 6 : Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(2, -1)$, $Q(3, 0)$ y $R(0, -2)$.

Solución:

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Hallamos A , B y C teniendo en cuenta que P , Q y R satisfacen la ecuación, por ser puntos de la circunferencia:

$$\begin{cases} 4+1+2A-B+C=0 \\ 9+0+3A+0+C=0 \\ 0+4+0-2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A-B+C=-5 \\ 3A+C=-9 \\ -2B+C=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-7 \\ C=-18 \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación es: $x^2 + y^2 + 3x - 7y - 18 = 0$

EJERCICIO 7 : Halla el valor de k para que la recta $3x + 4y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = \left(\frac{0}{2}, \frac{-4}{2} \right) = (0, -2)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{0+4-(-5)} = \sqrt{9} = 3$$

- Calculamos la distancia del centro a la recta dada: $d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) + k|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|k-8|}{5}$

- La recta es tangente a la circunferencia cuando:

$$\frac{|k-8|}{5} = 3 \rightarrow |k-8| = 15 \rightarrow \begin{cases} k-8=15 \rightarrow k=23 \\ k-8=-15 \rightarrow k=-7 \end{cases}$$

EJERCICIO 8 : Obtén el centro y el radio de la circunferencia cuyo centro está en la recta $y = 3x$ y que pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(1, 4)$.

Solución:

Si tiene su centro en la recta $y = 3x$, las coordenadas de este son $C(x, 3x)$.

La distancia de cada uno de los puntos dados al centro ha de ser igual (esta distancia es el radio de la circunferencia):

$$\sqrt{(x-3)^2 + (3x-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (3x-4)^2}$$

$$x^2 - 6x + 9 + 9x^2 - 12x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 9x^2 - 24x + 16 \Rightarrow 8x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}$$

El centro de la circunferencia es $C\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

$$\text{El radio es: } r = \text{dist}(C, (3, 2)) = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

EJERCICIO 9 : Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(1, 4)$ y tiene su centro en la recta $y = 2x$.

Solución:

Si tiene su centro en la recta $y = 2x$, las coordenadas de este son $C(x, 2x)$.

La distancia de A al centro ha de ser igual que la distancia de B al centro (esta distancia es el radio de la circunferencia): $\text{dist}(A, C) = \text{dist}(B, C) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (2x-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (2x-4)^2}$

$$x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 16x + 16$$

$$12x = 12 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2$$

El centro de la circunferencia es $C(1, 2)$.

$$\text{El radio es: } r = \text{dist}(A, C) = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{La ecuación será: } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

EJERCICIO 10 : Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $(2, -3)$ y que es tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

Solución:

El radio, R , de la circunferencia es igual a la distancia del centro a la recta dada:

$$R = \text{dist}(C, r) = \frac{|6 + 12 + 5|}{\sqrt{25}} = \frac{23}{5}$$

$$\text{La ecuación será: } (x-2)^2 + (y+3)^2 = \frac{529}{25} \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - \frac{204}{25} = 0$$

$$25x^2 + 25y^2 - 100x + 150y - 204 = 0$$

EJERCICIO 11 : Obtén la ecuación de la circunferencia de radio 2 que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 2)$.

Solución:

El centro de la circunferencia pertenece a la mediatriz del segmento de extremos $A(1, 0)$ y $B(3, 2)$:

$$\text{– Punto medio de } A \text{ y } B \rightarrow M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (2, 1)$$

$$\text{– Pendiente de la recta que pasa por } A \text{ y } B \rightarrow m = \frac{2-0}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{– Pendiente de la mediatriz (perpendicular) } \rightarrow \frac{-1}{m} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\text{– Ecuación de la mediatriz: } y = 1 - 1(x - 2) \rightarrow y = 1 - x + 2 \rightarrow y = 3 - x$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son $C(x, 3-x)$.

$$\text{La distancia del centro a los puntos } A \text{ y } B \text{ debe ser igual a 2: } \text{dist}(A, C) = \sqrt{(x-1)^2 + (3-x)^2} = 2$$

$$x^2 - 2x + 1 + 9 - 6x + x^2 = 4 \rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$\bullet \text{ Centro } (3, 0) \text{ y radio 2: } (x-3)^2 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\bullet \text{ Centro } (1, 2) \text{ y radio 2: } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

EJERCICIO 12 :

a) Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación: $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0$

b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5, que es concéntrica a la del apartado anterior.

Solución:

$$\text{a) } 2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2} \right) = (2, 3)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{4+9-4} = \sqrt{9} = 3$$

b) La circunferencia tiene radio 5 y centro $(2, 3)$. Su ecuación será:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

EJERCICIO 13 : Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $4x + 3y - 25 = 0$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - y - 7 = 0$ y $2x + 3y - 1 = 0$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Hallamos su centro: } \begin{cases} 3x - y - 7 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 7 \\ 2x + 3(3x - 7) - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow 2x + 9x - 21 - 1 = 0 \rightarrow 11x = 22 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -1 \Rightarrow \text{El centro es } C(2, -1). \end{aligned}$$

El radio, R , es igual a la distancia del centro a la recta tangente:

$$R = \text{dist}(C, r) = \frac{|8 - 3 - 25|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\text{La ecuación será: } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

EJERCICIO 14 : Estudia la posición relativa de la recta $r: 2x + y = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}\right) = (2, 1)$$

$$\text{Radio} = R = \sqrt{4 + 1 - (-4)} = \sqrt{9} = 3$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada: $\text{dist}(C, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1,79 < 3 = \text{radio}$

Por tanto, la circunferencia y la recta son secantes. Se cortan en dos puntos.

EJERCICIO 15 : Halla la posición relativa de la recta $3x + 4y - 25 = 0$ con respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Si se cortan en algún punto, halla sus coordenadas.

Solución:

Como tenemos que hallar los posibles puntos de corte, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ 3x + 4y - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{25 - 3x}{4} \\ x^2 + \left(\frac{25 - 3x}{4}\right)^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{625 - 150x + 9x^2}{16} - 25 = 0 \rightarrow 16x^2 + 625 - 150x + 9x^2 - 400 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25x^2 - 150x + 225 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 4$$

Se cortan en el punto $(3, 4)$. Por tanto, son tangentes.

EJERCICIO 16 : Obtén el valor de k para que la recta $s: x + y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

$$\text{Centro} = C = \left(-\frac{6}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (-3, -1)$$

$$\text{Radio} = r = \sqrt{9 + 1 - 6} = \sqrt{4} = 2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada: $\text{dist}(C, s) = \frac{|-3 - 1 + k|}{\sqrt{2}} = \frac{|k - 4|}{\sqrt{2}}$

- Para que la recta sea tangente a la circunferencia, esta distancia ha de ser igual al radio:

$$\frac{|k-4|}{\sqrt{2}}=2 \rightarrow |k-4|=2\sqrt{2} \begin{cases} k-4=2\sqrt{2} \rightarrow k=4+2\sqrt{2} \\ k-4=-2\sqrt{2} \rightarrow k=4-2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $k_1 = 4+2\sqrt{2}$; $k_2 = 4-2\sqrt{2}$

EJERCICIO 17 : Estudia la posición relativa de la recta $y = \frac{8-4x}{3}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 20 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left(\frac{12}{2}, \frac{6}{2} \right) = (6, 3)$$

$$\text{Radio} = r = \sqrt{36 + 9 - 20} = \sqrt{25} = 5$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$s: y = \frac{8-4x}{3} \rightarrow 3y = 8-4x \rightarrow 4x + 3y - 8 = 0 \Rightarrow \text{dist}(C, s) = \frac{|24 + 9 - 8|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5 = \text{radio}$$

- Como la distancia del centro a la recta es igual al radio, la recta es tangente a la circunferencia.

EJERCICIO 18 : Halla la posición relativa de la recta $r: x + y = 2$ con respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-4}{2} \right) = (-1, -2)$$

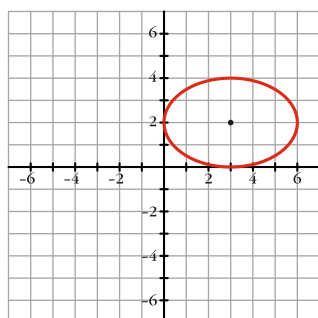
$$\text{Radio} = R = \sqrt{1 + 4 - 1} = \sqrt{4} = 2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada: $\text{dist}(C, r) = \frac{|-1 - 2 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,53 > 2 = \text{radio}$

Por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

ELIPSE

EJERCICIO 19 : Escribe la ecuación de la siguiente elipse y halla sus semiejes, sus focos y su excentricidad:



Solución:

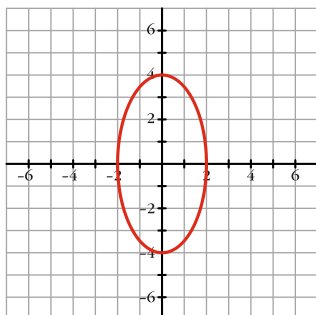
$$\text{Ecuación: } \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Semieje mayor: 3; semieje menor: 2

Focos: $F(3 + \sqrt{5}, 2)$ y $F'(3 - \sqrt{5}, 2)$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,75$

EJERCICIO 20 : Halla los semiejes, los focos y la excentricidad de la siguiente elipse. Escribe su ecuación:



Solución:

Semieje mayor: 4; semieje menor: 2

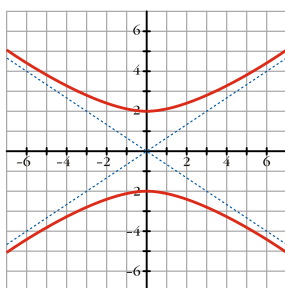
Focos : $F(0, \sqrt{12})$ y $F'(0, -\sqrt{12})$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0,87$

Ecuación: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

HIPÉRBOLA

EJERCICIO 21 : Pon la ecuación de la siguiente hipérbola, su semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



Solución:

Ecuación: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

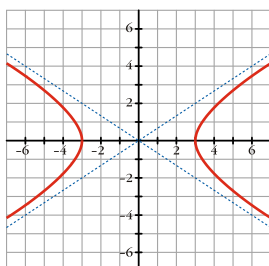
Semieje: 2

Focos : $F(0, \sqrt{13})$ y $F'(0, -\sqrt{13})$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$

Asíntotas: $y = \frac{2}{3}x$; $y = -\frac{2}{3}x$

EJERCICIO 22 : Escribe la ecuación de la siguiente hipérbola y halla sus semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



Solución:

$$\text{Ecuación: } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Semieje: 3

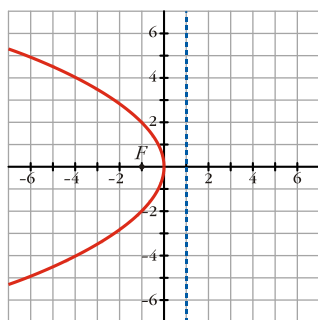
$$\text{Focos: } F(\sqrt{13}, 0) \text{ y } F'(-\sqrt{13}, 0)$$

$$\text{Excentricidad: } \frac{\sqrt{13}}{3} \approx 1,2$$

$$\text{Asíntotas: } y = \frac{2}{3}x ; \quad y = -\frac{2}{3}x$$

PARÁBOLA

EJERCICIO 23 : Halla el foco, la directriz y la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:

Directriz: $x = 1$. Foco $(-1, 0)$.

$$\text{Ecuación: } y^2 = -4x$$

LUGARES GEOMÉTRICOS

EJERCICIO 24 : Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas

$$r_1: x + 3y - 1 = 0 \text{ y } r_2: 3x - y + 4 = 0.$$

Solución:

Los puntos $P(x, y)$ de las bisectrices cumplen que:

$$\text{dist}(P, r_1) = \text{dist}(P, r_2), \text{ es decir: } \frac{|x + 3y - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x - y + 4|}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{aligned} |x + 3y - 1| &= |3x - y + 4| \quad \begin{cases} \rightarrow x + 3y - 1 = 3x - y + 4 \rightarrow 2x - 4y + 5 = 0 \\ \rightarrow x + 3y - 1 = -3x + y - 4 \rightarrow 4x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Son dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2 .

EJERCICIO 25 : Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(2, 3)$ y $B(4, 1)$.

Solución:

Los puntos $P(x, y)$ de la mediatriz cumplen que:

$$\text{dist}(P, A) = \text{dist}(P, B), \text{ es decir: } \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado en los dos miembros y operamos:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 \\ 4x - 4y - 4 &= 0 \quad \rightarrow \quad x - y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Es una recta perpendicular al segmento AB , que pasa por su punto medio.

RECOPILACIÓN

EJERCICIO 26 : ¿Cuál es el lugar geométrico cuya suma de distancias a los puntos $A(0, 1)$ y $B(0, -1)$ es 8?.
Halla su ecuación.

Solución:

Es una elipse de focos A y B y constante $k = 8$. Hallamos su ecuación:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\text{dist}(P, A) + \text{dist}(P, B) = 8, \text{ es decir: } \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 8$$

Elevamos al cuadrado y operamos para simplificar:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 8 - \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 64 + x^2 + (y+1)^2 - 16\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 64 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 16\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 64 + 4y$$

$$2\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 16 + y$$

$$4(x^2 + y^2 + 2y + 1) = (y + 16)^2$$

$$4x^2 + 4y^2 + 8y + 4 = y^2 + 32y + 256$$

$$4x^2 + 3y^2 - 24y - 252 = 0. \text{ Dividimos entre 12: } \frac{4x^2}{12} + \frac{3y^2}{12} - \frac{24y}{12} - \frac{252}{12} = 0 \rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - 2y - 21 = 0. \text{ Es una elipse.}$$

EJERCICIO 27 : Halla el lugar geométrico de los puntos, P , del plano tales que su distancia a $Q(2, 4)$ sea igual a 3. ¿De qué figura se trata?

Solución:

Es una circunferencia de centro $(2, 4)$ y radio 3. Hallamos su ecuación:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

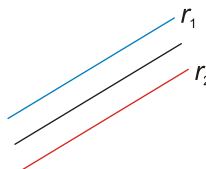
$$\text{dist}(P, Q) = 3, \text{ es decir: } \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 3. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$$

EJERCICIO 28 : Identifica y halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P , del plano tales que su distancia a la recta $r_1: x + y + 1 = 0$ sea igual que su distancia a la recta $r_2: 2x + 2y + 4 = 0$.

Solución:

Las dos rectas dadas, $r_1: x + y + 1 = 0$ y $r_2: x + y + 2 = 0$, son rectas paralelas. Por tanto, el lugar geométrico pedido será otra recta, paralela a las dos, a igual distancia de ellas:



Hallamos su ecuación:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\text{dist}(P, r_1) = \text{dist}(P, r_2), \text{ es decir: } \frac{|x + y + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x + y + 2|}{\sqrt{2}}$$

$$x + y + 1 = x + y + 2 \rightarrow 1 = 2 \rightarrow \text{Imposible}$$

$$|x + y + 1| = |x + y + 2| \rightarrow x + y + 1 = -x - y - 2 \rightarrow 2x + 2y + 3 = 0$$

Observamos que la recta obtenida es paralela a r_1 y r_2 .

EJERCICIO 29 : Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, $P(x, y)$, tales que el triángulo ABP sea rectángulo en P , siendo $A(2, 1)$ y $B(-6, 1)$. Interpreta la figura que obtienes.

Solución:

Para que el triángulo sea rectángulo en P , se ha de cumplir que:

$$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Rightarrow (2 - x, 1 - y) \cdot (-6 - x, 1 - y) = 0$$

$$(2 - x)(-6 - x) + (1 - y)^2 = 0$$

$$-12 - 2x + 6x + x^2 + 1 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0; \text{ es decir:}$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

Obtenemos una circunferencia de centro $(-2, 1)$ (que es el punto medio del segmento AB) y de radio 4.

EJERCICIO 30 : Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-4, 0)$ y $B(4, 0)$ es 40. Identifica la figura resultante.

Solucion:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, ha de tenerse que:

$$[\text{dist}(P, A)]^2 + [\text{dist}(P, B)]^2 = 40; \text{ es decir:}$$

$$(x + 4)^2 + y^2 + (x - 4)^2 + y^2 = 40$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + x^2 - 8x + 16 + y^2 = 40$$

$$2x^2 + 2y^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Obtenemos una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2.

EJERCICIO 31 : Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P , del plano tales que su distancia al punto $A(1, 0)$, es el triple de su distancia a la recta $x = 2$. Identifica la figura que obtienes.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\text{dist}(P, A) = 3 \text{dist}(P, x = 2), \text{ es decir: } \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 3|x - 2|. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36$$

$$8x^2 - y^2 - 34x + 35 = 0. \text{ Es una hipérbola.}$$

EJERCICIO 32 : Obtén el lugar geométrico de los puntos, P , del plano tales que:

$$\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, r)} = 2, \text{ siendo } A(1, 0) \text{ y } r: y = 4$$

¿Qué figura obtienes?

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, r)} = 2, \text{ es decir: } \text{dist}(P, A) = 2 \cdot \text{dist}(P, r)$$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2 \cdot |y - 4|. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(y^2 - 8y + 16)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4y^2 - 32y + 64$$

$$x^2 - 3y^2 - 2x + 32y - 63 = 0. \text{ Es una hipérbola.}$$

EJERCICIO 33 : Halla el lugar geométrico de los puntos, P , del plano cuya distancia a $A(2, 0)$ sea el doble de la distancia a $B(-1, 0)$. Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$\text{dist}(P, A) = 2 \cdot \text{dist}(P, B)$, es decir: $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2)$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 12x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4. \text{ Es una circunferencia de centro } (-2, 0) \text{ y radio } 2.$$

EJERCICIO 34

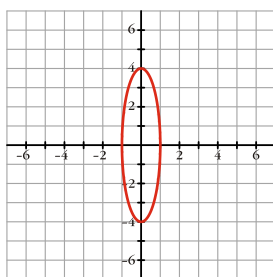
a) Describe la siguiente cónica y represéntala gráficamente: $16x^2 + y^2 = 16$

b) ¿Cuáles son sus focos?

Solución:

a) $16x^2 + y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$

Es una elipse de semiejes 1 y 4. Su gráfica es:



b) Puesto que $a^2 - b^2 = c^2$, $a^2 = 16$ y $b^2 = 1 \rightarrow c = \pm\sqrt{15}$

Los focos son $F(0, \sqrt{15})$ y $F'(0, -\sqrt{15})$.

EJERCICIO 35

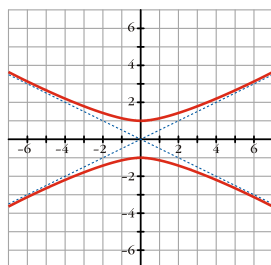
a) Identifica la siguiente cónica y represéntala: $4y^2 - x^2 = 4$

b) ¿Cuáles son sus focos?

Solución:

a) $4y^2 - x^2 = 4 \rightarrow \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$

Es una hipérbola, cuya gráfica es:



b) Como $c^2 - a^2 = b^2$, y $a=1$ y $b=2 \rightarrow c^2 = 5 \rightarrow c = \pm\sqrt{5}$

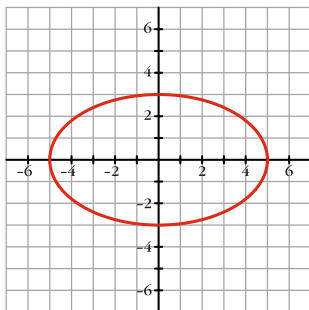
Los focos son $F(0, \sqrt{5})$ y $F'(0, -\sqrt{5})$.

EJERCICIO 36 : Identifica la siguiente cónica y represéntala: $9x^2 + 25y^2 = 225$

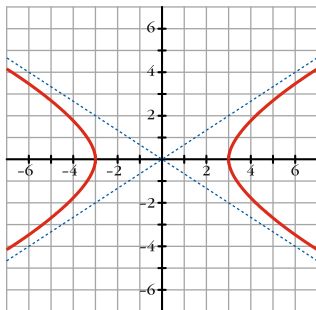
Solución:

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Es una elipse de semiejes 5 y 3. Su gráfica es:



EJERCICIO 37 : Obtén la ecuación de la cónica cuya gráfica es:



Solución:

Observamos que la ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; y que $a = 3$.

Como las asíntotas son $y = \pm \frac{2}{3}x$ y $a = 3 \rightarrow b = 2$

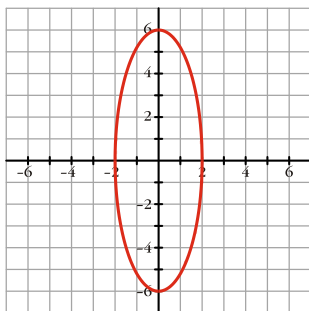
Así, la ecuación será: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

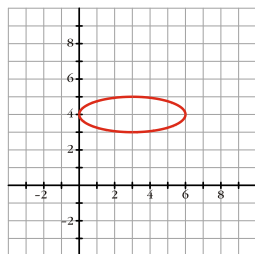
EJERCICIO 38 : Describe la siguiente cónica y represéntala: $36x^2 + 4y^2 = 144$

Solución:

$$36x^2 + 4y^2 = 144 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Es una elipse de semiejes 2 y 6. Su gráfica es:

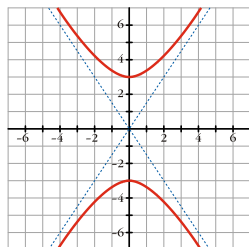


EJERCICIO 39 : Escribe la ecuación de la siguiente cónica:**Solución:**

Es una elipse de centro (3, 4) y semiejes 3 y 1. Su ecuación será: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{1} = 1$

EJERCICIO 40 : Identifica la siguiente cónica y represéntala gráficamente: $4y^2 - 9x^2 = 36$ **Solución:**

$4y^2 - 9x^2 = 36 \rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$. Es una hipérbola, cuya gráfica es:

**EJERCICIO 41 : Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y represéntalas:**

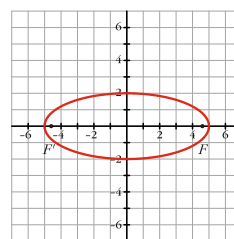
a) $4x^2 + 25y^2 = 100$

b) $4y^2 - x^2 = 4$

Solución:

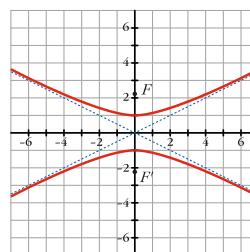
a) $4x^2 + 25y^2 = 100 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

Es una elipse: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Semieje mayor: } 5 \\ \text{Semieje menor: } 2 \\ \text{Focos: } F(\sqrt{21}, 0) \text{ y } F'(-\sqrt{21}, 0) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,92 \end{array} \right.$



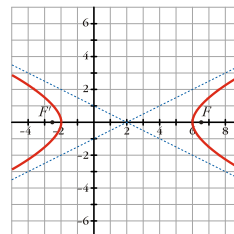
b) $4y^2 - x^2 = 4 \rightarrow y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

Es una hipérbola: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Semieje: } 1 \\ \text{Focos: } F(0, \sqrt{5}) \text{ y } F'(0, -\sqrt{5}) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{5}}{1} \approx 2,24 \\ \text{Asíntotas: } y = \frac{1}{2}x ; y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right.$

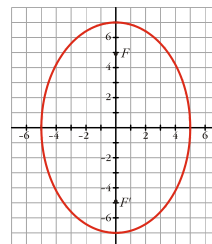


EJERCICIO 42 : Identifica las siguientes cónicas, dibújalas y halla sus focos y su excentricidad:

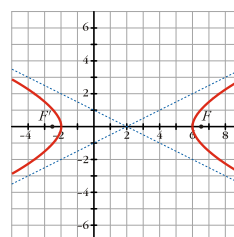
$$\text{a) } \frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{b) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$$

Solución:a) Es una hipérbola de centro $P(2, 0)$.Los focos son: $F(2 + 2\sqrt{5}, 0)$ y $F'(2 - 2\sqrt{5}, 0)$ La excentricidad es: $e = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$ Las asíntotas son: $y = \frac{1}{2}(x-2)$; $y = -\frac{1}{2}(x-2)$ b) Es una elipse de centro $C(0,0)$

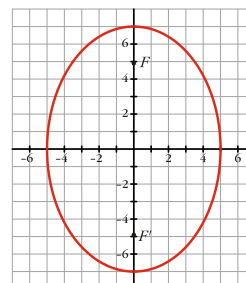
$$\text{Es una elipse : } \begin{cases} \text{Semieje mayor: } 7 \\ \text{Semieje menor: } 5 \\ \text{Focos : } F(0, \sqrt{24}) \text{ y } F'(0, -\sqrt{24}) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{24}}{7} \approx 0,7 \end{cases}$$

**EJERCICIO 43 : Identifica las siguientes cónicas, dibújalas y halla sus focos y su excentricidad:**

$$\text{a) } \frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{b) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$$

Solución:a) Es una hipérbola de centro $P(2, 0)$.Los focos son: $F(2 + 2\sqrt{5}, 0)$ y $F'(2 - 2\sqrt{5}, 0)$ La excentricidad es: $e = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$ Las asíntotas son: $y = \frac{1}{2}(x-2)$; $y = -\frac{1}{2}(x-2)$ b) Es una elipse de centro $C(0,0)$

$$\text{Es una elipse : } \begin{cases} \text{Semieje mayor: } 7 \\ \text{Semieje menor: } 5 \\ \text{Focos : } F(0, \sqrt{24}) \text{ y } F'(0, -\sqrt{24}) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{24}}{7} \approx 0,7 \end{cases}$$

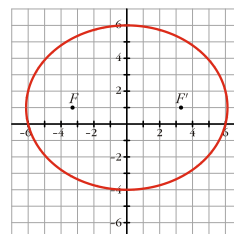


EJERCICIO 44 : Identifica estas cónicas, halla sus elementos y dibújalas:

$$\text{a) } \frac{x^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1 \quad \text{b) } y^2 - 4x = 0$$

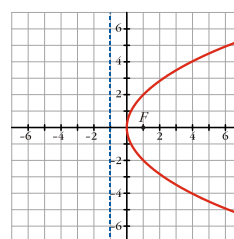
*Solución:*a) Es una elipse de centro $P(0, 1)$.

Semieje mayor: 6; semieje menor: 5

Focos: $F(\sqrt{11}, 1)$ y $F'(-\sqrt{11}, 1)$ Excentricidad: $\frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0,55$ 

$$\text{b) } y^2 - 4x = 0 \rightarrow y^2 = 4x$$

Es una parábola: $\begin{cases} \text{Vértice: } (0, 0) \\ \text{Foco: } (1, 0) \\ \text{Directriz: } x = -1 \end{cases}$

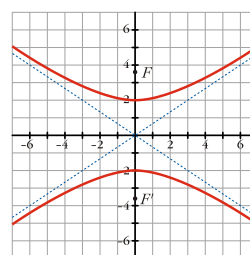
**EJERCICIO 45 : Halla los elementos característicos de las siguientes cónicas, descríbelas y represéntalas gráficamente:**

$$\text{a) } \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1 \quad \text{b) } 25x^2 + 100y^2 = 2500$$

Solución:

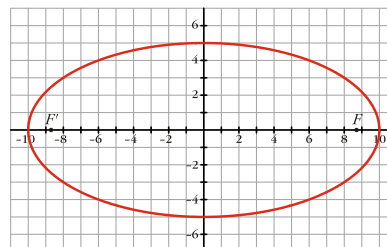
a) Es una hipérbola.

Semieje: 2

Focos: $F(0, \sqrt{13})$ y $F'(0, -\sqrt{13})$ Excentricidad: $\frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$ Asíntotas: $y = \frac{2}{3}x$; $y = -\frac{2}{3}x$ 

$$\text{b) } 25x^2 + 100y^2 = 2500 \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Es una elipse: $\begin{cases} \text{Semieje mayor: } 10; \text{ semieje menor: } 5 \\ \text{Focos: } F(5\sqrt{3}, 0) \text{ y } F'(-5\sqrt{3}, 0) \\ \text{Excentricidad: } \frac{5\sqrt{3}}{10} \approx 0,87 \end{cases}$



EJERCICIO 46 : Dadas las siguientes cónicas, identifícalas, obtén sus elementos característicos y represéntalas gráficamente:

a) $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ b) $y^2 - 9x^2 = 9$

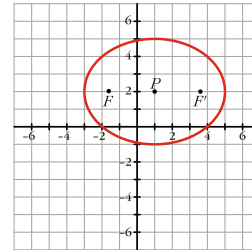
Solución:

a) Es una elipse de centro $P(1, 2)$.

Semieje mayor: 4; semieje menor: 3

Focos : $F(1+\sqrt{7}, 2)$ y $F'(1-\sqrt{7}, 2)$

Excentricidad: $\frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0,66$



b) $y^2 - 9x^2 = 9 \rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{1} = 1$

Es una hipérbola { $\left\{ \begin{array}{l} \text{Semieje: } 3 \\ \text{Focos : } F(0, \sqrt{10}) \text{ y } F'(0, -\sqrt{10}) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{10}}{3} \approx 1,05 \\ \text{Asíntotas: } y = 3x ; \quad y = -3x \end{array} \right.$

