

TEMA 9 – LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS.

9.1 – LUGARES GEOMÉTRICOS

Se llama **lugar geométrico** a un conjunto de puntos que cumplen una cierta propiedad.

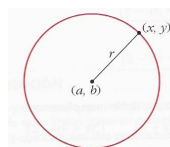
Llamando $X(x,y)$ a las coordenadas del punto genérico y aplicando analíticamente la propiedad que debe cumplir, se obtiene la ecuación de la figura geométrica.

9.2 – ESTUDIO DE LA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN

Circunferencia de centro C y radio r es el lugar geométrico de los puntos del plano X , cuya distancia al centro C es el radio r .

$$d(X,C) = r$$



Si $X(x,y)$ y $C(a,b) \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Desarrollando :
$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \text{ tal que } \begin{cases} A = -2a \\ B = -2b \\ C = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases}$$

Notas:

- Hay que tener en cuenta que r^2 debe ser mayor cero
- Para poder aplicar lo anterior los coeficientes de x^2 y de y^2 deben ser 1. Si son distintos no es una circunferencia y si iguales pero distintos de 1 debemos dividir toda la ecuación entre dicho coeficiente antes de calcular el centro y el radio con las ecuaciones anteriores.

POSICIÓN RELATIVA DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

	Dibujo	Resolviendo el sistema	Calculando distancias
Exterior		No existe solución	$d(\text{recta}, \text{centro}) > \text{radio}$
Tangente		Una solución	$d(\text{recta}, \text{centro}) = \text{radio}$
Secante		Dos soluciones	$d(\text{recta}, \text{centro}) < \text{radio}$

9.3 – POTENCIA DE UN PUNTO A UNA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN: Se llama potencia de un punto $P(\alpha, \beta)$ a una circunferencia C a $d^2 - r^2$, siendo d la distancia del punto al centro:

$$\text{Pot} = d^2 - r^2 = (\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 - r^2$$

Si el punto es exterior a la circunferencia ($d > r$) $\Rightarrow$ $\text{Pot} > 0$

Si el punto es de la circunferencia ($d = r$) $\Rightarrow$ $\text{Pot} = 0$

Si el punto es interior a la circunferencia ($d < r$) $\Rightarrow$ $\text{Pot} < 0$

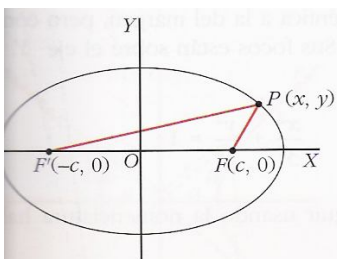
EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS: Se llama **eje radical** de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto a ambas.

El eje radical de dos circunferencias es una recta perpendicular a la línea de los centros.

9.5 – ESTUDIO DE LA ELIPSE

DEFINICIÓN

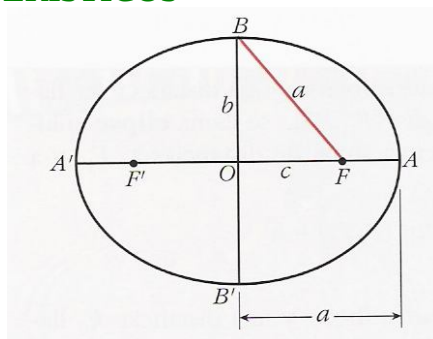
Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante $k \Rightarrow d(X, F) + d(X, F') = k$



CÓMO SE DIBUJA

Se clavan dos estacas y con una cuerda tensa con extremos en dichas estacas se va dibujando la elipse.

ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS



Focos : F y F'

Centro : O

Semieje mayor : $a = OA = OA' \Rightarrow$ Eje mayor : $2a = AA'$

Semieje menor : $b = OB = OB' \Rightarrow$ Eje menor : $2b = BB'$

Semidistancia focal : $c = OF = OF' \Rightarrow$ Distancia focal : $2c = FF'$

La constante $k = AF + AF' = AF + FA' = AA' = 2a$

Además como B es un punto de la elipse: $BF + BF' = 2a$ y como $BF = BF' \Rightarrow BF = a$

Por tanto aplicando Pitágoras se cumple que $a^2 = b^2 + c^2$ y $a > b, c$

EXCENTRICIDAD

Se llama excentricidad de una elipse al cociente entre la distancia focal y el eje mayor

$$e = c/a \quad 0 < e < 1$$

A mayor excentricidad más alargada es la elipse.

ECUACIÓN REDUCIDA

Ecuación de la elipse centrada en el origen y de eje mayor OX

Aplicando la definición de elipse $d(X,F) + d(X,F') = 2a$ y la relación entre sus elementos $a^2 = b^2 + c^2$:

$$d((x,y),(c,0)) + d((x,y),(-c,0)) = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$$

Despejando una raíz y elevando al cuadrado $\Rightarrow$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 + 2xc + c^2 +$$

$$y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow \text{Simplificando} \Rightarrow -4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow \text{Elevando al cuadrado} \Rightarrow$$

$$c^2x^2 + 2cxa^2 + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) \Rightarrow \text{Agrupando} \Rightarrow$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow$$

$$-b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \text{Dividiendo por } a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la elipse de centro el origen y de eje mayor OY

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ecuación de la elipse de centro $C(\alpha,\beta)$ y el eje mayor paralelo a OX

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

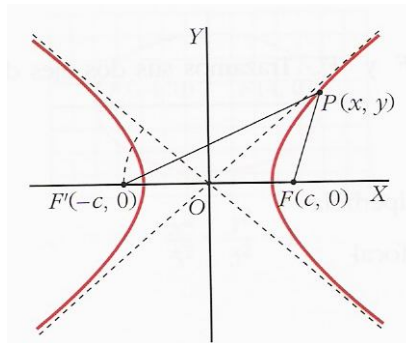
Ecuación de la elipse de centro $C(\alpha,\beta)$ y el eje mayor paralelo a OY

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$$

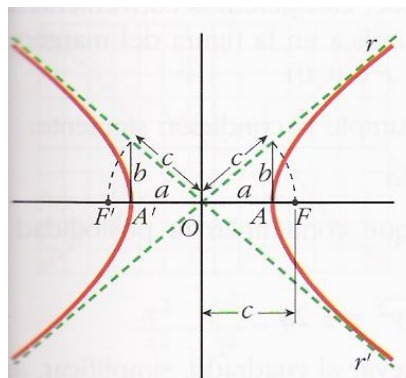
9.6 – ESTUDIO DE LA HIPÉRBOLA

DEFINICIÓN

Lugar geométrico de los puntos del plano cuya resta de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante $k \Rightarrow d(X,F) - d(X,F') = k$



ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS



Focos : F y F'

Centro : O

Semieje: $a = OA = OA' \Rightarrow$ Eje mayor : $2a = AA'$

Semidistancia focal : $c = OF = OF' \Rightarrow$ Distancia focal : $2c = FF'$

Asíntotas : Las rectas r y r'

La constante $k = AF - AF' = AF - FA' = AA' = 2a$

Además como B es un punto de la elipse: $BF + BF' = 2a$ y como $BF = BF' \Rightarrow BF = a$

Por tanto aplicando Pitágoras se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$ y $c > a, b$

EXCENTRICIDAD

Se llama excentricidad de una hipérbola al cociente entre la distancia focal y el eje mayor

$$e = c/a \quad e > 1$$

A mayor excentricidad más plana es la hipérbola.

ECUACIÓN REDUCIDA**Ecuación de la hipérbola centrada en el origen y de eje mayor OX**

Aplicando la definición de hipérbola $d(X,F) - d(X,F') = 2a$ y la relación entre sus elementos $c^2 = a^2 + b^2$:

$$d((x,y),(c,0)) - d((x,y),(-c,0)) = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$$

Despejando una raíz y elevando al cuadrado $\Rightarrow$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$cx + a^2 = -a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow \text{Elevando al cuadrado} \Rightarrow$$

$$c^2x^2 + 2cxa^2 + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) \Rightarrow \text{Agrupando} \Rightarrow$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \text{Dividiendo por } a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la hipérbola de centro el origen y de eje mayor OY

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ecuación de la hipérbola de centro $C(\alpha,\beta)$ y el eje mayor paralelo a OX

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la hipérbola de centro $C(\alpha,\beta)$ y el eje mayor paralelo a OY

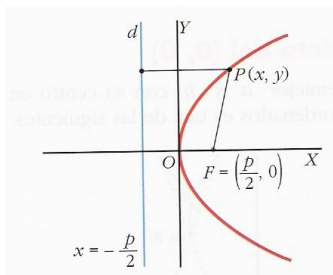
$$-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$$

9.7 – ESTUDIO DE LA PARÁBOLA

DEFINICIÓN

Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz $\Rightarrow d(X,F) = d(X,d)$

ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS



F : Foco

d : Directriz

V : Vértice de la parábola

p : Distancia del foco a la directriz

EXCENTRICIDAD

La excentricidad de una parábola es siempre 1

ECUACIÓN REDUCIDA

Ecuación reducida de la parábola de vértice el origen y directriz paralela al eje OX

F (0,p/2) y d: $y = -p/2 \Rightarrow$ Aplicando la definición : $d(X,F) = d(X,d)$

$$\sqrt{x^2 + (y - p/2)^2} = |y + p/2| \Rightarrow \text{Elevando al cuadrado} \Rightarrow x^2 + y^2 - py + p^2/4 = y^2 + py + p^2/4 \Rightarrow x^2 = 2py$$

Nota: Si la parábola se abre hacia abajo : $x^2 = -2py$

Ecuación reducida de la parábola de vértice el origen y directriz paralela al eje OY

Si la parábola se abre hacia la derecha: $y^2 = 2px$

Si la parábola se abre hacia la izquierda : $y^2 = -2px$

Si está centrada en (α, β)

Si la parábola se abre hacia la arriba: $(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta)$

Si la parábola se abre hacia la abajo: $(x - \alpha)^2 = -2p(y - \beta)$

Si la parábola se abre hacia la derecha: $(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$

Si la parábola se abre hacia la izquierda: $(y - \beta)^2 = -2p(x - \alpha)$