

TEMA 11 – CÁLCULO DE PROBABILIDADES

11.0 – INTRODUCCIÓN

11.0.1. - EXPERIENCIAS ALEATORIAS, CASOS, ESPACIO MUESTRAL, SUCESOS

Un **suceso aleatorio** es aquel acontecimiento en cuya realización influye el azar. Los sucesos aleatorios ocurren en **experiencias aleatorias**, que son aquellas cuyo resultado depende del azar.

Caso es cada uno de los resultados que se pueden obtener al realizar una experiencia aleatoria.

Espacio muestral, E, es el conjunto de todos los casos posibles.

Suceso es todo subconjunto del espacio muestral.

Los casos son también sucesos. Se llaman **sucesos elementales** ó **sucesos individuales**.

El espacio muestral se llama **suceso seguro**.

11.0.2 – EXPERIENCIAS REGULARES E IRREGULARES

Experiencias regulares: Experiencias aleatorias diseñadas de manera que las probabilidades de los sucesos de que constan son previsibles (lanzar un dado, lanzar una moneda,...)

Experiencias irregulares: Experiencias aleatorias en las que es imposible prever el valor de las probabilidades de los sucesos. Sólo se pueden conocer, aproximadamente, experimentando (lanzar un dado trucado, lanzar una chincheta,...)

11.1 – LOS SUCESOS Y SUS PROBABILIDADES

Cada vez que se realiza una experiencia aleatoria, **ocurre** un suceso elemental. También **ocurre** cualquier suceso que contiene a ese suceso elemental.

11.1.1. – RELACIONES ENTRE SUCESOS

Se llama **unión** de dos sucesos A y B, y se designa $A \cup B$ (se lee “A unión B”) al suceso formado por todos los elementos de A y los de B.

El suceso $A \cup B$ ocurre cuando lo hacen A o B o ambos.

Se llama **intersección** de dos sucesos A y B, y se designa $A \cap B$ (se lee “A intersección B”) al suceso formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B.

El suceso $A \cap B$ ocurre cuando lo hacen a la vez A y B.

Dos sucesos se llaman **incompatibles** cuando no tienen en común ningún suceso elemental. Es decir, es imposible que ocurran simultáneamente.

Si dos sucesos A y B son incompatibles, entonces $A \cap B = \emptyset$

Un suceso, S' , se dice que es **contrario** del suceso S cuando entre ambos se reparten los elementos del espacio muestral. Es decir, siempre ocurre uno u otro, pero nunca ocurren simultáneamente.

Si S' es el suceso contrario de S , entonces: $S \cup S' = E$ y $S \cap S' = \emptyset$

11.1.2 – PROPIEDADES DE LAS PROBABILIDADES DE LOS SUCESOS

La probabilidad de que ocurra el suceso seguro es 1; esto es natural, pues ocurre el 100% de las veces que se realiza la experiencia. También es natural que ese 100 % se reparta entre los sucesos elementales de que consta la prueba. Las siguientes afirmaciones son traducción de estos hechos.

Propiedades de la probabilidad:

- La probabilidad del suceso imposible es cero, $P(\emptyset) = 0$, la del suceso seguro es 1, $P(E) = 1$, y la probabilidad de cualquier otro suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
- La suma de las probabilidades de los sucesos elementales es 1. Es decir si $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, entonces, $P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) = 1$
- La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de sus sucesos elementales: Si $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$, entonces $P(s) = P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_k)$
- Si dos sucesos S y S' son contrarios, entonces sus probabilidades suman 1:
 $P(S) + P(S') = 1 \Rightarrow P(S') = 1 - P(S)$

11.2 – PROBABILIDADES EN EXPERIENCIAS SENCILLAS

11.2.1 – EXPERIENCIAS IRREGULARES

Para calcular la probabilidad de un suceso correspondiente a una experiencia irregular (una chincheta, un dado cargado,...) no queda más remedio que experimentar. Es decir, repetir la experiencia muchas veces, averiguar la frecuencia relativa de ese suceso y asignarle ese valor (aproximado) a la probabilidad. Cuantas más veces hagamos la experiencia, más fiable será el valor asignado.

11.2.2 – EXPERIENCIAS REGULARES. LEY DE LAPLACE

Si la experiencia aleatoria se realiza con un instrumento regular (dado correcto, baraja completa,...), entra en juego la **Ley de Laplace**, que dice:

- Si el espacio muestral tiene n casos y la experiencia es *regular*, entonces todos ellos tienen la misma probabilidad, $1/n$.
- Si un suceso tienen k casos, entonces su probabilidad es k/n .

$$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

11.3 – EXPERIENCIAS COMPUESTAS

Las experiencias simples que forman una experiencia compuesta pueden ser **dependientes** o **independientes**.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

11.3.1 – EXTRACCIONES CON O SIN REEMPLAZAMIENTO

Con reemplazamiento $\Rightarrow$ Independientes

Sin reemplazamiento (Lo normal) $\Rightarrow$ Dependientes

11.4 – COMPOSICIÓN DE EXPERIENCIAS INDEPENDIENTES

Es más sencillo calcular las probabilidades de los sucesos compuestos descomponiéndolos en sucesos simples.

Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera, S_2 en la segunda,.... es: $P(S_1 \cap S_2 \cap \dots) = P(S_1).P(S_2).....$

11.5 - COMPOSICIÓN DE EXPERIENCIAS DEPENDIENTES

En una experiencia compuesta por varias dependientes, el resultado de cada una influye en el resultado de la siguientes.

Si dos sucesos S_1 y S_2 corresponden a pruebas dependientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera y S_2 en la segunda es

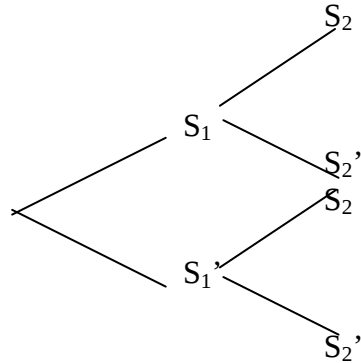
$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1).P(S_2/S_1)$$

$P(S_2/S_1) = P(\text{Probabilidad de que ocurra } S_2 \text{ en la segunda supuesto que ocurrió } S_1 \text{ en la primera})$

$$P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(S_1).P(S_2/S_1).P(S_3/S_1 \cap S_2)$$

11.5.1 – DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA MEDIANTE UN DIAGRAMA DE ÁRBOL

Las experiencias dependientes pueden ser descritas mediante diagramas de árbol:



11.6 - TABLAS DE CONTINGENCIA

Una **tabla de contingencia** describe un colectivo de individuos repartidos por dos conceptos. En cada concepto hay varias clases. Cada individuo está contabilizado en alguna casilla y solo en una.