

TEMA 6 – LA SEMEJANZA Y SUS APLICACIONES

6.1 FIGURAS SEMEJANTES

6.1.1 DEFINICIÓN

Dos **figuras** son **semejantes** cuando tienen la misma forma:

- Los ángulos correspondientes son todos iguales.
- Los segmentos correspondientes son proporcionales. La razón de proporcionalidad se llama **razón de semejanza**

6.1.2 FIGURAS SEMEJANTES EN LA VIDA CORRIENTE

- Fotografías
- Maquetas de monumentos, copias de cuadros famosos, reproducciones de coches,....
- Planos y mapas

6.1.3 ESCALAS

Escala es el cociente entre cada longitud de reproducción (mapa, plano, maqueta) y la correspondiente longitud de la realidad. Es, por tanto, la **razón de semejanza** entre la reproducción y la realidad.

Se denota 1:a y significa que una unidad del plano corresponde a “a” unidades de la realidad.

6.1.4 RELACIÓN ENTRE LAS ÁREAS Y ENTRE LOS VOLÚMENES

La **razón entre las áreas** de dos figuras semejantes es igual al **cuadrado de la razón de semejanza**.

La **razón entre los volúmenes** de dos figuras semejantes es igual al **cubo de la razón de semejanza**.

Por tanto, si la razón de semejanza entre dos figuras es **k**, la razón entre sus áreas es **k²** y la razón entre sus volúmenes **k³**.

6.2 RECTÁNGULOS DE PROPORCIONES INTERESANTES

6.2.1 UNA HOJA DE PAPEL A-4

Las hojas de papel que utilizamos habitualmente (A-4) tienen una curiosa propiedad: si la partimos por la mitad, cada uno de los dos trozos es semejante a la hoja inicial.

6.2.2 RECTÁNGULO ÁUREO

Si en el rectángulo áureo suprimimos un cuadrado, el rectángulo que queda es semejante al inicial.

6.3 SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

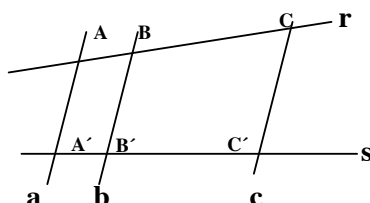
6.3.1 INTRODUCCIÓN

Sirve para averiguar si dos figuras son semejantes, porque cualquier figura se puede descomponer en triángulos (si la figura tiene lados curvos, la descomposición será sólo aproximada).

6.3.2 TEOREMA DE THALES

Si las rectas a , b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas, r y s , entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$



También ocurre el recíproco: si los segmentos AB y BC son proporcionales a $A'B'$ y $B'C'$, y las rectas a y b son paralelas, entonces, la recta c es paralela a ellas.

6.3.3 TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Dos **triángulos semejantes** tienen:

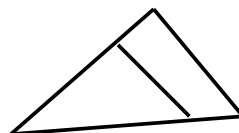
- Sus lados proporcionales: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r = \text{razón de semejanza}$
- Sus ángulos, respectivamente iguales: $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$

6.3.4 TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE THALES

Los triángulos están en posición de Thales si :

- Tienen un ángulo común
- Los lados opuestos al ángulo común son paralelos

Es decir, el triángulo pequeño está encajado en el grande.



Dos triángulos en posición de Thales son semejantes.

6.3.5 CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Se llama **criterio de semejanza** de dos triángulos a un conjunto de condiciones tales que, si se cumplen, tendremos la seguridad de que los triángulos son semejantes:

PRIMER CRITERIO : Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales: $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ ($\hat{C} = \hat{C}'$)

SEGUNDO CRITERIO: Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales: $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

TERCER CRITERIO: Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales. $A = A'$ $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

6.4 LA SEMEJANZA DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

6.4.1 CRITERIO DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual uno de sus ángulos agudos.

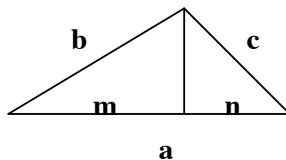
6.4.2 CONSECUENCIAS DEL CRITERIO DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Todos los triángulos obtenidos al trazar perpendiculares a algunos de los lados de un triángulo son semejantes.

En un triángulo, la altura sobre la hipotenusa determina dos triángulos semejantes al original.

6.4.3 TEOREMA DEL CATETO

El cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa

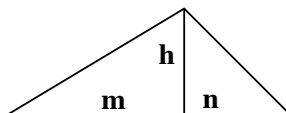


$$b^2 = a.m$$

$$c^2 = a.n$$

6.4.4 ALTURA

El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de los dos segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa.



$$h^2 = m.n$$