

TEMA 8 – GEOMETRÍA ANALÍTICA

RELACIÓN ENTRE PUNTOS DEL PLANO

EJERCICIO 1 : Halla el punto medio del segmento de extremos $P(2, 1)$ y $Q(-4, 3)$.

Solución:

Las coordenadas del punto medio, M , son la semisuma de las coordenadas de los extremos:

$$M = \left(\frac{2 + (-4)}{2}, \frac{1 + 3}{2} \right) = (-1, 2)$$

EJERCICIO 2 : Halla el simétrico, A' , del punto $A(-1, 0)$ respecto de $B(2, -8)$.

Solución:

Llamamos (x', y') a las coordenadas de A' . El punto medio del segmento de extremos A y A' es B .

$$\text{Por tanto: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1 + x'}{2} = 2 \\ \frac{0 + y'}{2} = -8 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = 5 \\ y' = -16 \end{array} \right\} \quad A'(5, -16)$$

EJERCICIO 3 : Determinar si los puntos $A(3,1)$, $B(5,2)$ y $C(1,0)$ están alineados.

$$\text{Solución: } \left\{ \begin{array}{l} AB = (5,2) - (3,1) = (2,1) \\ AC = (1,0) - (3,1) = (-2,-1) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{-2} = \frac{1}{-1} \text{ Cierto } \Rightarrow \text{ Están alineados}$$

EJERCICIO 4 : Halla el valor de k para que los puntos $A(1, 1)$, $B(0, 3)$ y $C(2,k)$ estén alineados.

$$\text{Solución: } \left\{ \begin{array}{l} AB = (0,3) - (1,1) = (-1,2) \\ AC = (2,k) - (1,1) = (1,k-1) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{2}{k-1} \rightarrow -k+1=2 \rightarrow k=-1$$

ECUACIONES DE RECTAS

EJERCICIO 5 :

a) Escribe la ecuación general de la recta, r , que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 6)$.

b) Halla la ecuación de la recta, s , paralela a $y = \frac{1}{2}x$ que pasa por el punto $(4, 4)$.

c) Obtén el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$\text{a) Pendiente} = \frac{6-0}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Ecuación: } y = 0 + 3(x-1) \rightarrow y = 3x - 3 \rightarrow 3x - y - 3 = 0$$

$$\text{b) Si son paralelas, tienen la misma pendiente: } m = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ecuación: } y = 4 + \frac{1}{2}(x-4) \rightarrow 2y = 8 + x - 4 \rightarrow x - 2y + 4 = 0$$

c) Es la solución del sistema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - y - 3 = 0 \\ y = 3x - 3 \end{array} \right.$$

$$x - 2y + 4 = 0 \rightarrow x - 2(3x - 3) + 4 = 0 \rightarrow x - 6x + 6 + 4 = 0 \rightarrow -5x = -10 \rightarrow x = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 3 \quad \text{Punto: } (2, 3)$$

EJERCICIO 6 :

- a) Halla la ecuación de la recta, r , que pasa por $(3, 2)$ y tiene como vector dirección $\vec{d}(1, 1)$.
 b) Escribe la ecuación de la recta, s , que pasa por $(5, 2)$ y es paralelo al eje X .
 c) Obtén el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Solución:

- a) Pendiente $= \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ Ecuación: $y = 2 + 1(x - 3) \rightarrow y = 2 + x - 3 \rightarrow y = x - 1$
 b) $y = 2$
 c) Es la solución de este sistema: $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow x - 1 = 2 \rightarrow x = 3$ Punto: $(3, 2)$

EJERCICIO 7 :

- a) Halla la ecuación de la recta, r , que pasa por $(0, 0)$ y es paralela al vector $\vec{d}(3, 6)$.
 b) Escribe la ecuación general de la recta, s , que pasa por $(3, 4)$ y es perpendicular a $x + y - 5 = 0$.
 c) Obtén el punto de intersección de las dos rectas anteriores.

Solución:

- a) Pendiente $= \frac{6}{3} = 2$
 Ecuación: $y = 2x$
 b) Pendiente de $x + y - 5 = 0 \rightarrow y = -x + 5 \rightarrow m = -1$
 Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$
 Ecuación de s : $y = 4 + 1(x - 3) \rightarrow y = 4 + x - 3 \rightarrow x - y + 1 = 0$
 c) Es la solución del siguiente sistema: $\begin{cases} y = 2x \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2$ Punto: $(1, 2)$

EJERCICIO 8 :

- a) Obtén la ecuación de la recta, r , que pasa por $(3, -1)$ y tiene pendiente $\frac{-1}{2}$.
 b) Escribe la ecuación de la recta, s , perpendicular a $x + 3y = 2$ que pasa por $(2, -4)$.
 c) Halla el punto de intersección de las rectas r y s .

Solución:

- a) $y = -1 - \frac{1}{2}(x - 3) \rightarrow 2y = -2 - x + 3 \rightarrow x + 2y - 1 = 0$
 b) Pendiente de $x + 3y = 2 \rightarrow y = \frac{-x + 2}{3} = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3} \rightarrow m = \frac{-1}{3}$
 Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1/3} = 3$
 Ecuación: $y = -4 + 3(x - 2) \rightarrow y = -4 + 3x - 6 \rightarrow y = 3x - 10$
 c) Es la solución del siguiente sistema:
 $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ y = 3x - 10 \end{cases} \rightarrow x + 2(3x - 10) - 1 = 0 \rightarrow x + 6x - 20 - 1 = 0 \rightarrow 7x - 21 = 0 \rightarrow x = 3$
 $y = 3(3) - 10 = 9 - 10 = -1$ Punto: $(3, -1)$

EJERCICIO 9 :

- a) Escribe la ecuación general de la recta, r , que pasa por los puntos $(0, 5)$ y $(1, 2)$.
 b) Obtén la ecuación de la recta, s , paralela a $2x + y = 3$ que pasa por el punto $(1, 1)$.
 c) Halla el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Solución:

- a) Pendiente $= \frac{2 - 5}{1 - 0} = \frac{-3}{1} = -3 \Rightarrow$ Ecuación: $y = 5 - 3(x - 0) \rightarrow y = 5 - 3x \rightarrow 3x + y - 5 = 0$

- b) Si son paralelas, tienen la misma pendiente: $2x + y = 3 \rightarrow y = -2x + 3 \rightarrow m = -2$
 Ecuación: $y = 1 - 2(x - 1) \rightarrow y = 1 - 2x + 2 \rightarrow y = -2x + 3$
- c) Es la solución del sistema siguiente: $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \rightarrow 3x - 2x + 3 - 5 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -1$
 Punto: $(2, -1)$

EJERCICIO 10 :

- a) Escribe la ecuación de la recta que pasa por $(2, 1)$ y es paralela a $y = \frac{1}{2}x + 3$.
- b) Halla la ecuación de la recta que pasa por $(0, -2)$ y es perpendicular a $2x + y = -3$.

Solución:

- a) Si son paralelas, tienen la misma pendiente: $y = \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow m = \frac{1}{2}$
 Ecuación: $y = 1 + \frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow 2y = 2 + x - 2 \rightarrow 2y = x \rightarrow y = \frac{x}{2}$
- b) Pendiente de $2x + y = -3 \rightarrow y = -2x - 3 \rightarrow m = -2$
 Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$
 Ecuación: $y = -2 + \frac{1}{2}x \rightarrow 2y = -4 + x \rightarrow x - 2y - 4 = 0$

EJERCICIO 11 : Dados los puntos A (2, -1) y B (3, 4), halla las ecuaciones de las dos rectas siguientes:

- a) r: pasa por A y es paralela a AB b) s: pasa por B y es paralela a AB

Solución: $\overline{AB} = (1, 5)$

Recta r: $m = \frac{5}{1}$. Ecuación: $y = -1 + 5(x - 2) \rightarrow y = -1 + 5x - 10 \rightarrow 5x - y - 11 = 0$

Recta s: $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5} \Rightarrow$ Ecuación: $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 3) \rightarrow 5y = 20 - x + 3 \rightarrow x + 5y - 23 = 0$

EJERCICIO 12 :

- a) Obtén la ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por el punto $(5, -1)$.
- b) Halla la ecuación general de la recta perpendicular a $3x - y = 1$ que pasa por el punto $(0, 1)$.

Solución: a) $y = -1$

- b) Pendiente de $3x - y = 1 \rightarrow y = 3x - 1 \rightarrow m = 3$

Pendiente de la perpendicular $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{3}$

Ecuación: $y = 1 - \frac{1}{3}x \rightarrow 3y = 3 - x \rightarrow x + 3y - 3 = 0$

EJERCICIO 13 :

- a) Halla la ecuación de la recta, r, paralela a $2x - 3y + 4 = 0$, que pasa por $(-1, 2)$.
- b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a $y - 1 = 0$ que pasa por $(3, 2)$.

Solución:

- a) Puesto que son paralelas, tienen la misma pendiente:

$2x - 3y + 4 = 0 \rightarrow y = \frac{2x + 4}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow m = \frac{2}{3}$

Ecuación de r: $y = 2 + \frac{2}{3}(x + 1) \rightarrow 3y = 6 + 2x + 2 \rightarrow 2x - 3y + 8 = 0$

- b) La recta $y - 1 = 0$ es paralela al eje X; por tanto, la que buscamos, es paralela al eje Y. Su ecuación será $x = 3$.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

EJERCICIO 14 : Calcula la distancia que hay entre los puntos $A(8, 10)$ y $B(-2, -14)$.

$$\text{Solución: } \text{dist}(A, B) = \sqrt{(-2-8)^2 + (-14-10)^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26$$

EJERCICIO 15 : Halla la distancia entre los puntos $P(6, -2)$ y $Q(0, 6)$.

$$\text{Solución: } \text{dist}(P, Q) = \sqrt{(0-6)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

REPASO

EJERCICIO 22 :

¿Cuál de las rectas $r: y - 3 = 5(x - 1)$, $s: y = \frac{2}{5}x$ y $t: \frac{x+1}{5} = \frac{1-y}{2}$ es paralela a la recta $2x - 5y + 4 = 0$?

Solución:

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente.

Pendiente de $r \rightarrow m = 5$

Pendiente de $s \rightarrow m = \frac{2}{5}$

Pendiente de $t: \frac{x+1}{5} = \frac{1-y}{2} \rightarrow \frac{2}{5}(x+1) = 1-y \rightarrow y = 1 - \frac{2}{5}(x+1) \rightarrow$

$\rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 1 - \frac{2}{5} \rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5} \rightarrow m = -\frac{2}{5}$

La pendiente de $2x - 5y + 4 = 0$ es $m = \frac{2}{5}$. Luego s es la recta paralela a $2x - 5y + 4 = 0$.

EJERCICIO 23 : Dada la recta $ax + by = 0$, indica qué relación debe haber entre a y b para que el punto $P(-2, 6)$ pertenezca a la recta.

Solución:

El punto $P(-2, 6)$ pertenecerá a la recta $ax + by = 0$ si se cumple:

$$a \cdot (-2) + b \cdot 6 = 0 \rightarrow -2a + 6b = 0 \rightarrow -a + 3b = 0 \rightarrow a = 3b$$

Luego, $P(-2, 6)$ pertenecerá a dicha recta si a es el triple de b .

EJERCICIO 25 : ¿Qué relación habrá entre a y b para que las rectas $r: ax + 3y = 6$ y $s: bx + y = 5$ sean paralelas? ¿Y para que sean perpendiculares?

Solución:

r y s son paralelas si la pendiente de ambas coincide.

Pendiente de $r \rightarrow 3y = 6 - ax \rightarrow y = -\frac{a}{3}x + 2 \rightarrow m_r = -\frac{a}{3}$

Pendiente de $s \rightarrow y = -bx + 5 \rightarrow m_s = -b$

$$m_r = m_s \rightarrow -\frac{a}{3} = -b \rightarrow a = 3b$$

Por tanto, r y s serán paralelas cuando a sea el triple de b .

$$\text{Para que } r \text{ y } s \text{ sean perpendiculares} \rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s} \rightarrow -\frac{a}{3} = \frac{-1}{-b} \rightarrow ab = -3$$

EJERCICIO 26 : Halla el valor de m para que las rectas $r : y - x + 3 = 0$ y $s : mx + 3y - 1 = 0$ no se corten.

Solución:

Para que r y s no se corten, el valor de m buscado será aquel que haga que r y s sean paralelas, es decir, tengan la misma pendiente.

Pendiente de $r \rightarrow y = x - 3 \rightarrow m_r = 1$

Pendiente de $s \rightarrow 3y = 1 - mx \rightarrow y = -\frac{m}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow m_s = -\frac{m}{3}$

$$m_r = m_s \rightarrow 1 = -\frac{m}{3} \rightarrow -3 = m$$

EJERCICIO 27 : Dadas las rectas $r : ax + c = 0$ y $s : a'x + c' = 0$:

a) ¿Son paralelas?

b) ¿Qué condición se ha de cumplir para que sean coincidentes?

c) Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y s que pase por el punto $(2, -3)$.

Solución:

a) Sí. Son rectas de la forma $x = k$, es decir, rectas paralelas al eje Y .

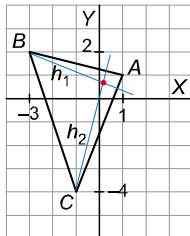
b) Para que sean coincidentes $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$.

c) Una recta perpendicular a r y s es de la forma $y = k'$, recta paralela al eje X . Como tiene que pasar por el punto $(2, -3)$, entonces la recta buscada es $y = -3$.

EJERCICIO 28: En el triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(-3, 2)$ y $C(-1, -4)$ halla:

- La ecuación de la altura h_1 que parte de B .
- La ecuación de la altura h_2 que parte de C .
- El ortocentro del triángulo (punto de intersección de las alturas).

Solución:



- La altura h_1 es perpendicular al lado AC .

$$\text{Pendiente de } AC \rightarrow m_1 = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Pendiente de } h_1 \rightarrow m_1' = -\frac{2}{5}$$

La recta h_1 pasa por B y su pendiente es $-\frac{2}{5}$; luego su ecuación es:

$$y = 2 - \frac{2}{5}(x + 3) \rightarrow 5y = 10 - 2x - 6 \rightarrow 5y + 2x - 4 = 0$$

- La altura h_2 es perpendicular al lado AB .

$$\text{Pendiente de } AB \rightarrow m_2 = \frac{-1}{4}$$

$$\text{Pendiente de } h_2 \rightarrow m_2' = 4$$

La recta h_2 pasa por C y su pendiente es 4; su ecuación es:

$$y = -4 + 4(x + 1) \rightarrow y = -4 + 4x + 4 \rightarrow y - 4x = 0$$

- Par calcular el ortocentro, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de h_1 y h_2 :

$$\left. \begin{array}{l} 5y + 2x - 4 = 0 \\ y - 4x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 5 \cdot (4x) + 2x - 4 = 0 \rightarrow 20x + 2x - 4 = 0 \rightarrow 22x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{22} = \frac{2}{11}$$

$$y = 4x = 4 \cdot \frac{2}{11} = \frac{8}{11} \Rightarrow \text{El ortocentro es el punto } \left(\frac{2}{11}, \frac{8}{11} \right).$$

EJERCICIO 29: Calcula el valor de a y de b para que las rectas $r: ax - 3y + 2 = 0$ y $s: bx + 9y - 5 = 0$ sean paralelas y, además, r pase por el punto $P(1, 2)$.

Solución:

$$\text{Pendiente de } r: ax + 2 = 3y \rightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{2}{3} \rightarrow m_r = \frac{a}{3}$$

$$\text{Pendiente de } s: bx - 5 = -9y \rightarrow y = -\frac{b}{9}x + \frac{5}{9} \rightarrow m_s = -\frac{b}{9}$$

Para que r y s sean paralelas, las pendientes han de coincidir:

$$m_r = m_s \rightarrow \frac{a}{3} = -\frac{b}{9} \rightarrow 3a = -b \rightarrow b = -3a$$

Calculamos a sabiendo que $P(1, 2)$ pertenece a la recta r :

$$a \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 = 0 \rightarrow a - 6 + 2 = 0 \rightarrow a = 4 \Rightarrow \text{Por tanto, } a = 4 \text{ y } b = -3 \cdot 4 = -12.$$