

TEMA 3: PROGRESIONES: Progresiones Aritméticas

1. Halla el término general de las siguientes sucesiones y el término que se pide:

a) 2,7,12,17,... ; a_{15} ?

Solución:

Es una progresión aritmética cuya diferencia $d=5$. El primer término es $a_1 = 2$. Por tanto sustituyendo en la fórmula tenemos:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)5 = 2 + 5n - 5 = 5n - 3. \text{ Por tanto } a_n = 5n - 3.$$

Y teniendo el término general podemos calcular el valor de cualquier término. Nos piden a_{15} .

Así que

$$a_n = 5n - 3 \text{ y } a_{15} = 5 \cdot 15 - 3 = 75 - 3 = 72$$

2. Hallar el término general y la suma de los quince primeros términos en cada caso:

a) 3,8,13,...

Solución:

Se trata de una progresión aritmética cuyo $a_1 = 3$ y $d = 5$.

Sustituyendo en la expresión del término general tenemos:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)5 \Rightarrow a_n = 5n - 2.$$

Para calcular la suma de los 15 primeros términos se sustituye en la expresión de la suma de los n primeros términos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2}. \text{ Por tanto necesitamos calcular el } a_{15} = 5 \cdot 15 - 2 = 73.$$

Entonces tenemos $a_1 = 3$ y $a_{15} = 73$

$$\text{Ya podemos calcular } S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(3 + 73) \cdot 15}{2} = 570. \text{ Por tanto } S_{15} = 570$$

3. **Solución:**

Sabemos que $a_5 = 13$ y $a_9 = 5$.

Sustituyendo en la fórmula del término general, se obtiene:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_5 = a_1 + (5-1)d \\ a_9 = a_1 + (9-1)d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 = a_1 + 4d \\ 5 = a_1 + 8d \end{cases} \text{ Resolviendo el sistema por reducción,}$$

obtenemos $d = -2$ y $a_1 = 21$.

El término general es: $a_n = 21 + (n-1)(-2) \Rightarrow a_n = -2n + 23$

Ahora calculamos, sustituyendo en el término general, el valor de a_{20} : $a_{20} = -2 \cdot 20 + 23 = -17$

Ahora calculamos S_{30} . Escribimos la fórmula correspondiente:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2}.$$

Necesitamos calcular a_{30} . Sustituyendo en el término general tenemos $a_{30} = -2 \cdot 30 + 23 = -37$

$$\text{Ya podemos calcular } S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} = \frac{(21 + (-37)) \cdot 30}{2} = -240 \Rightarrow S_{30} = -240$$

4. $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16}) \cdot 16}{2}$. Nos falta saber a_1 y a_{16} . Pero como se trata de una progresión aritmética podemos poner que $a_{16} = a_1 + (16-1)d = a_1 + 15 \cdot 2 = a_1 + 30$.

Si sustituimos en $S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16}) \cdot 16}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 30) \cdot 16}{2} \Rightarrow 288 = \frac{(2a_1 + 30) \cdot 16}{2}$. Resolvemos la ecuación: $576 = 32a_1 + 480 \Rightarrow 96 = 32a_1 \Rightarrow a_1 = 3$.

Ahora calculamos el término general: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1 \Rightarrow a_n = 2n - 1$